Inspectoratul Şcolar Județean
Harghita

Olimpiada de matematică
etapa zonală – 11 februarie 2012
Barem de corectare

Clasa a IX-a

1. Între cifrele numărului natural $\overline{ab}$ se scrie o a treia cifră. Media aritmetică a numărului de trei cifre astfel obținut şi a numărului $\overline{ab}$ este exact numărul $\overline{ba}$. Să se determine numărul $\overline{ab}$.

Rezolvare

Fie c cifra introdusă. Se obține $\dfrac{\overline{ab}+\overline{acb}}{2}=\overline{ba}$.

Se observă că numărul $\overline{acb}<200$, deoarece altfel media aritmetică nu va fi un număr de două cifre. Rezultă $a=1$. Atunci $10+b+100+10c+b=20b+2$

$10c+108=18b \Rightarrow 5c+54=9b \Rightarrow 5c \,\vdots\, 9$, deci $c=0$ sau $c=9$.

Dacă $c=0 \Rightarrow b=6$, deci $\overline{ab}=16$, dacă $c=9 \Rightarrow b=11$, nu este cifră.

2. Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile $\left[\dfrac{[x]}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{2}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Rezolvare

$[x] \le x < [x]+1 \Rightarrow \dfrac{[x]}{2} \le \dfrac{x}{2}$

Dacă $\left[\dfrac{[x]}{2}\right] \ne \left[\dfrac{x}{2}\right]$, atunci $\exists k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\dfrac{[x]}{2} < k \le \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow [x] < 2k \le x \Rightarrow [x] < 2k < [x]+1$ contradicție, deoarece $[x]$ şi $[x]+1$ sunt numere întregi consecutive.

3. Demonstrați că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere reale strict pozitive, atunci:

a) $\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{b_n} \ge \dfrac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}$;

b) $\dfrac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\dfrac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}>1$.

Rezolvare

a) Demonstrăm prin inducție matematică

Pentru $n=1$, $\dfrac{a_1}{b_1}\ge\dfrac{a_1^2}{a_1b_1}$, inegalitate adevărată.

Presupunem inegalitate adevărată pentru n şi demonstrăm pentru $n+1$.

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}\Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\ge\frac{\overbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}^{x}{}^2}{\underbrace{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}_{y}}+\frac{\overbrace{a_{n+1}}^{a}}{\underbrace{b_{n+1}}_{b}}\overset{?}{\ge}\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{a}{b}\ge\frac{(x+a)^2}{y+ab}\Leftrightarrow x^2by+x^2ab^2+ay^2+a^2yb\ge x^2yb+a^2by+2axby\Leftrightarrow$$

$x^2b^2+y^2\ge 2xby\Leftrightarrow(xb-y)^2\ge 0$, adev.

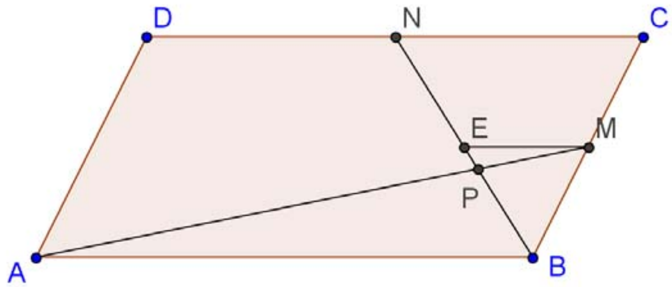
Deci inegalitatea din enunț este adevărată.

b) În inegalitatea de la punctul a) înlocuim $b_i=S-a_i$, unde $S=a_1+\ldots+a_n$.

$$\Rightarrow\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n}\ge\frac{S^2}{2\sum\limits_{i<j}a_ia_j}=\frac{S^2}{S^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}>1$$

4. Fie M, N mijloacele laturilor BC, CD ale paralelogramului $ABCD$ şi P intersectia dreptelor AM şi BN. Arătați că $\dfrac{PM}{AM}+\dfrac{2BP}{BN}=1$.

Rezolvare



ME PCD **(**E Î BN **)**

$$\frac{PM}{AP} = \frac{EM}{AB} = \frac{\frac{CN}{2}}{AB} = \frac{\frac{CD}{4}}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{PM}{AM} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{BP}{PE} = \frac{AB}{EM} = 4 \Rightarrow \frac{2BP}{BN} = \frac{BP}{\frac{BN}{2}} = \frac{BP}{BE} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{PM}{AM} + \frac{2BP}{BN} = 1$$

Observație: problema are și soluție vectorială.